

Mathematik Q3: Einführung zu DGL

- DGL = **Differenzialgleichungen**
-

- **Beispiele:**

1. $xy' - 2y = 0$

2. $y'' + x^2 = 0$

3. $y^{iv} = y^2$

4. $y' - 2xy = 0$

5. $y' - 3y = 0$

Begriff

DGL = Gleichung, die Ableitungen einer gesuchten Funktion $y=f(x)$ enthält.

- Eine DGL hat **Ordnung n**, falls die höchste auftretende Ableitung die **n-te Ableitung** ist.

1. $xy' - 2y = 0 \rightarrow$ Ordnung 1

2. $y'' + x^2 = 0 \rightarrow$ Ordnung 2

3. $y^{iv} = y^2 \rightarrow$ Ordnung 4

4. $y' - 2xy = 0 \rightarrow$ Ordnung 1

5. $y' - 3y = 0 \rightarrow$ Ordnung 1

Wie löst man eine DGL?

- Durch **Probieren** → Physiker fragen . . .
 - **Trennung der Variablen**
 - funktioniert gut bei DGL erster Ordnung
 - Wir schreiben statt $y' = \frac{dy}{dx}$
-

• Beispiel I zu DGL-Bsp. 1

$$xy' - 2y = 0$$

$$x \frac{dy}{dx} - 2y = 0 \Leftrightarrow x \frac{dy}{dx} = 2y$$

→ **Trennung der Variablen**

$$x \, dy = 2y \, dx$$

$$\frac{1}{y} \, dy = 2 \frac{1}{x} \, dx$$

$$\int \frac{1}{y} \, dy = 2 \int \frac{1}{x} \, dx$$

$$\ln |y| = 2 \ln(x) + c$$

$$y = e^{2\ln(x)} \cdot e^c = x^2 + C$$

$$\rightarrow y' = 2x$$

- Probe: $x \cdot 2x - 2 \cdot x^2 = 0$
-

• Beispiel II zu DGL-Bsp. 5

$$y' - 3y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - 3y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 3y \Leftrightarrow dy = 3y \, dx$$

→ **Trennung der Variablen**

$$\frac{1}{y} dy = 3 dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = 3 \int dx$$

$$\ln |y| = 3x + c$$

$$y = e^{3x + c} = e^c \cdot e^{3x} = C \cdot e^{3x}$$

$$\rightarrow y' = 3C \cdot e^{3x}$$

- Probe: $3C \cdot e^{3x} - 3C \cdot e^{3x} = 0$

• **Beispiel III zu DGL-Bsp. 4**

$$y' - 2xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

→ **Trennung der Variablen**

$$\frac{1}{y} dy = 2x dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = 2 \int x dx$$

$$\ln |y| = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + c = x^2 + c$$

$$y = e^{x^2 + c} = e^c \cdot e^{x^2} = C \cdot e^{x^2}$$

$$\rightarrow y' = C \cdot 2x \cdot e^{x^2}$$

- Probe: $C \cdot 2x \cdot e^{x^2} - C \cdot 2x \cdot e^{x^2} = 0$

- **Lösung zu DGL-Bsp. 2:** $y'' + x^2 = 0$
 - $y = -\frac{1}{12} \cdot x^4 + C_1x + C_2 \Rightarrow y' = -\frac{4}{12} \cdot x^3 + C_1 \Rightarrow y'' = -\frac{12}{12} \cdot x^2 = -x^2$
 - **Lösung zu DGL-Bsp. 3:** $y^{iv} = y^2$
 - $y = 840 \cdot x^{-4}$ (von Vincent I.)
-

- → Aufgaben (Bitte mit Probe!)
 - **Aufgabe 1:** Finde eine Lösung der DGL $y' = -\frac{y}{x}$
 - Lösung: $y = \frac{C}{x}$
 - **Aufgabe 2:** Finde eine Lösung der DGL $y' + 2xy = 0$
 - Lösung: $y = C \cdot e^{-x^2}$
 - **Aufgabe 3:** Finde eine Lösung der DGL $y' = \frac{x}{y}$
 - Lösung: $y = \sqrt{x^2 + C}$
-